Leonhard Fellermayr

Übungsblatt 5 zur Numerischen Mathematik I

Aufgabe 17 (Hermite-Interpolation von $\cos x$)

Newton'sche Formel:

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_0] \cdot (x - x_0) + f[x_0, x_0, x_0] \cdot (x - x_0)2 + f[x_0, x_0, x_0, x_1] \cdot (x - x_0)3 +$$

$$+ f[x_0, x_0, x_0, x_1, x_1] \cdot (x - x_0)3 \cdot (x - x_1)$$

Einsetzen:

$$p(x) = f[0] + f[0,0] \cdot x + f[0,0,0] \cdot x2 + f\left[0,0,0,\frac{\pi}{2}\right] \cdot x3 + f\left[0,0,0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \cdot x3 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Betrachte **Rekursionsschema**:

$f[0] = 1$ **(*)**

$f[0] = 1$ $\quad f[0,0] = f'[0] = 0$ **(*)**

$f[0] = 1$ $\quad f[0,0] = f'[0] = 0$ $\quad f[0,0,0] = \frac{f''[0]}{2!} = -\frac{1}{2}$ **(*)**

$f[\frac{\pi}{2}] = 0$ $\quad f[0,\frac{\pi}{2}] = \frac{-2}{\pi}$ $\quad f[0,0,\frac{\pi}{2}] = \frac{-\frac{2}{\pi} - f'[0]}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{\pi 2}$ $\quad f[0,0,0,\frac{\pi}{2}] = \frac{-\frac{4}{\pi 2} + \frac{1}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi 2 - 8}{\pi 3}$ **(*)**

$f[\frac{\pi}{2}] = 0$ $\quad f[\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] = f'(\frac{\pi}{2}) = -1$ $\quad f[0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] = \frac{f'[\frac{\pi}{2}] + \frac{2}{\pi}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{-2\pi + 4}{\pi 2}$ $\quad f[0,0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] = \frac{\frac{-2\pi+8}{\pi 2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{16 - 4\pi}{\pi 3}$

Zuletzt:

$$f[0,0,0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] = \frac{\frac{16-4\pi}{\pi^3} - \frac{\pi^2 - 8}{\pi^3}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{48 - 8\pi - 2\pi^2}{\pi^4}$$

Das **Interpolations-Polynom** ergibt sich somit zu

$$p_{n=4}(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{\pi^2 - 8}{\pi^3} \cdot x^3 + \frac{48 - 8\pi - 2\pi^2}{\pi^4} \cdot x^3 \cdot (x - \frac{\pi}{2})$$

Tatsächliche Fehler:

$x = \quad 0,75 \quad < 1,3795 \cdot 10^{-3}$

$x = \quad -1,5 \quad < 0,0665$ (Extrapolation!)

$x = \quad 1,5 \quad < 9,435 \cdot 10^{-5}$ (!)

Fehlerabschätzung mit Satz 4.15 (VL-Skript):

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \omega_{n+1}(x)$$

Dies lässt sich nach mehrfacher Anwendung der Dreiecksungleichung schreiben als

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \cdot |\omega_{n+1}(x)|$$

In unserem Fall ist $n = 4$, $f^{(4)}(x) = -\sin(x)$ für $f = \cos$.
Nun berechne die Abschätzung für $x = 0,75$:

$$|f(x) - p_n(x)| = |cos(0,75) - p_n(0,75)| \leq \frac{1}{5!} \cdot \left| 0,75^3 \cdot \left(0,75 - \frac{\pi}{2}\right)^2 \right| \approx 2,3685 \cdot 10^{-3}$$

Abschätzung für $x = -1,5$:

$$|f(x) - p_n(x)| = |cos(-1,5) - p_n(-1,5)| \le \frac{1}{5!} \cdot \left|(-1,5)^3 \cdot \left(-1,5 - \frac{\pi}{2}\right)^2\right| \approx 0,2653$$

Aufgabe 18 (Vergleich von Interpolationen)

Die in Aufgabe 17 durchgeführte Umformung von **Satz 4.15** gelte sinngemäß. Nach Angabe ist $n = 3$ (4 Messdaten), und $\|f^{(4)}\|_\infty = 10$:

$$|f(x) - p_n(x)| \le \frac{10}{4!} = \left|\frac{5}{12} \cdot \omega_{n+1}(x)\right| = \frac{5}{12} \cdot |\omega_{n+1}(x)|$$

Idee/Vorgehensweise:
Um bei den verschiedenen Verfahren jeweils den **globalen** Fehler auf dem ganzen Intervall abschätzen zu können, soll auf $[-1,1]$ integriert werden, d. h. die linke und rechte Seite der obigen Formel wird unter Integralbildung umgeschrieben zu

$$\int_{-1}^{1} (|f(x) - p_n(x)|)dx \le \frac{5}{12} \cdot \int_{-1}^{1} |\omega_{n+1}(x)|dx$$

I. Äquidistante Stützpunkte: $f(-1)$, $f(-\frac{1}{3})$, $f(\frac{1}{3})$, $f(1)$

$$\omega_{n+1}(x) = (x+1) \cdot (x + \frac{1}{3}) \cdot (x - \frac{1}{3}) \cdot (x-1) = (x^2 - 1) \cdot (x^2 - \frac{1}{9}) = x^4 - \frac{10}{9}x^2 + \frac{1}{9} =: a(x)$$

$a(x)$ besitzt auf $[-1,1]$ nur positive Funktionswerte und ist symmetrisch zur y-Achse. Eine Stammfunktion ist

$$A(x) := \frac{1}{5}x^5 - \frac{10}{27}x^3 + \frac{1}{9}x$$

Berechne damit zunächst zwei Teilintegrale:

$$A(x)\Big|_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 - \frac{10}{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{1215} - \frac{10}{729} + \frac{1}{27}$$

und

$$A(x)\Big|_{\frac{1}{3}}^{1} = \frac{1}{5} - \frac{10}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{1215} + \frac{10}{729} - \frac{1}{27}$$

Unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaft von $a(x)$ berechne nun das Integral auf $[-1,1]$:

$$\int_{-1}^{1} |a(x)| = 2 \cdot \left[\int_0^{\frac{1}{3}} a(x) + \int_{\frac{1}{3}}^{1} -a(x)\right] = 2 \cdot \left[A(x)\Big|_0^{\frac{1}{3}} - A(x)|_{\frac{1}{3}}^{1}\right] =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{2}{1215} - \frac{20}{729} + \frac{2}{27} - \frac{1}{5} + \frac{10}{27} - \frac{1}{9}\right) \approx 0,21509$$

Eingesetzt in obige Formel 4.15 (in Integralform) lässt sich nun der globale Fehler abschätzen:

$$\int_{-1}^{1} (|f(x) - p_n(x)|)dx \leq \frac{5}{12} \cdot \int_{-1}^{1} |\omega_{n+1}(x)|dx = \frac{5}{12} \cdot 0,21509 \approx \mathbf{0{,}08962}$$

II. Tschebyscheff-Stützpunkte: $f(\cos(\frac{\pi}{8}))$, $f(\cos(\frac{3\pi}{8}))$, $f(\cos(\frac{5\pi}{8}))$, $f(\cos(\frac{7\pi}{8}))$

$$\omega_{n+1}(x) = (x - \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)) \cdot (x - \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)) \cdot (x - \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)) \cdot (x - \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right))$$

Wegen $x - \cos(\frac{5\pi}{8}) = x + cos(\frac{3\pi}{8})$ sowie $x - \cos(\frac{7\pi}{8}) = x + cos(\frac{\pi}{8})$ ist dies gleichwertig mit dem Term

$$\omega_{n+1}(x) = \left[x^2 - cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right] \cdot \left[x^2 - \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right] = x^4 - x^2\left[\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right] + \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Dies lässt sich ($\rightarrow$ Rechenregeln für cos) noch vereinfachen zu

$$\omega_{n+1}(x) = x^4 - x^2 + \frac{1}{8} =: c(x)$$

Diese Funktion ist abermals symmetrisch, wir betrachten deshalb nicht ganz $[-1, 1]$, sondern nur $[0, 1]$. Auf $\left[0, \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right]$ und $\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), 1\right]$ sind die Funktionswerte positiv, auf $\left[\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right), \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]$ negativ. Wir werden $[0, 1]$ daher in diese 3 Intervalle aufteilen und dann stückweise integrieren.
Zunächst ist aber eine geeignete Stammfunktion für $c(x)$ zu finden:

$$C(x) := \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x$$

Das Integral wird folgendermaßen zusammengesetzt:

$$\int_{-1}^{1} |c(x)| = 2 \cdot \int_{0}^{1} |c(x)| = 2 \cdot \left| \int_{0}^{\cos(\frac{3\pi}{8})} c(x) + \int_{\cos(\frac{3\pi}{8})}^{\cos(\frac{\pi}{8})} -c(x) + \int_{\cos(\frac{\pi}{8})}^{1} c(x) \right| \approx 0,157542$$

Denn die Berechnung der 3 Teilintegrale ergibt

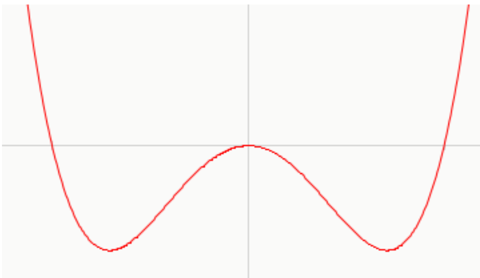
```
octave-mpi:3> (1/5)*cos(3*pi/8)^5-(1/3)*cos(3*pi/8)^3+(1/8)*cos(3*pi/8)
ans = 0.030796

octave-mpi:8> (1/5)*cos(pi/8)^5-(1/3)*cos(pi/8)^3+(1/8)*cos(pi/8)-(1/5)*
              cos(3*pi/8)^5+(1/3)*cos(3*pi/8)^3-(1/)*cos(3*pi/8)
ans = -0.043552

octave-mpi:7> (1/5)-(1/3)+(1/8)-(1/5)*cos(pi/8)^5+(1/3)*cos(pi/8)^3-(1/8)*cos(pi/8)
ans = 0.0044228
```

Eingesetzt in obige Formel 4.15 (in Integralform) lässt sich nun der globale Fehler abschätzen:

$$\int_{-1}^{1} (|f(x) - p_n(x)|)dx \leq \frac{5}{12} \cdot \int_{-1}^{1} |\omega_{n+1}(x)|dx = \frac{5}{12} \cdot 0,157542 \approx \mathbf{0{,}065643}$$

III. Hermite-Interpolation: $f(-1),\ f(0),\ f'(0),\ f(1)$

$$\omega_{n+1}(x) = (x+1) \cdot x \cdot x \cdot (x-1) = x^2 \cdot (x^2 - 1) = x^4 - x^2 =: b(x)$$



Diese Funktion ist auf $[-1,1]$ stets negativ. Wir interessieren uns aber für die absoluten Abweichungen und integrieren deshalb über der negierten Funktion $-b(x) = x^2 - x^4$ (diese ist auf $[-1,1]$ stets positiv). Eine Stammfunktion ist $-B(x) := \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5$, das Integral ergibt sich wieder aus Symmetriegründen zu

$$\int_{-1}^{1} -b(x) = 2 \cdot \int_{0}^{1} -b(x) = 2 \cdot -B(x)\Big|_0^1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \approx 0,266666$$

Eingesetzt in obige Formel 4.15 (in Integralform) lässt sich nun der globale Fehler abschätzen:

$$\int_{-1}^{1} (|f(x) - p_n(x)|)dx \leq \frac{5}{12} \cdot \int_{-1}^{1} |\omega_{n+1}(x)|dx = \frac{5}{12} \cdot 0,026666 \approx \mathbf{0{,}111111}$$

IV. Hermite-Interpolation: $f(-1),\ f'(-1),\ f(1),\ f'(1)$

$$\omega_{n+1}(x) = (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-1) = (x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1 =: d(x)$$

$d(x)$ ist auf $[-1,1]$ stets positiv und ebenfalls symmetrisch zur y-Achse.
Eine Stammfunktion ist $D(x) := \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x$. Die Integration ergibt

$$\int_{-1}^{1} d(x) = 2 \cdot \int_{0}^{1} d(x) = 2 \cdot D(x)\Big|_0^1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1\right) \approx 1,06667$$

Eingesetzt in obige Formel 4.15 (in Integralform) lässt sich nun der globale Fehler abschätzen:

$$\int_{-1}^{1} (|f(x) - p_n(x)|)dx \leq \frac{5}{12} \cdot \int_{-1}^{1} |\omega_{n+1}(x)|dx = \frac{5}{12} \cdot 1,06667 \approx \mathbf{0{,}444444}$$

Fazit

Die Interpolation auf Tschebyscheff-Stützstellen approximiert die gesuchte Funktion am besten – der globale Fehler auf $[-1, 1]$ ist hierbei minimal. Die Hermite-Interpolation IV. ist global betrachtet besonders schlecht, da Stützstellen nur an den Intervallgrenzen liegen.

Aufgabe 19 (Normen)

Gegeben sind folgende Norm-Definitionen:

$$\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$$

$$\|f\|_2 := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|f\|_\infty := \sup |f(x)|$$

a) **Nachweis der Normeigenschaften für $\|f\|_1$:**

(i) Null:

$$\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \geq 0 \quad \text{wegen } |\cdot| > 0 \text{ und Monotonie des Integrals}$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow |f(x)| = 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} 0 = 0 \Rightarrow \|f\|_1 \equiv 0$$

(ii) Positive Homogenität:

$$\|\lambda \cdot x\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |\lambda \cdot f(x)| dx = |\lambda| \cdot \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = |\lambda| \cdot \|x\|_1$$

(iii) Dreiecksungleichung:

$$\|f + g\|_1 = \int |f(x) + g(x)| dx \leq \int |f(x)| + \int |g(x)| = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

Nachweis der Normeigenschaften für $\|f\|_2$:

(i) Null:

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

$$\|f\|_2 = 0 \Leftrightarrow \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \ \forall \ x \Leftrightarrow f \equiv 0$$

(ii) Positive Homogenität:

$\|\lambda \cdot f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |\lambda \cdot f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |\lambda|^2 \cdot |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(|\lambda|^2 \cdot \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \cdot \|f\|_2$

(iii) Dreiecksungleichung:

Die allgemeine Form der p-Norm ist

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Die Minkowski-Ungleichung besagt für $0 \leq p < \infty$:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Die Dreiecksungleichung folgt daraus insbesondere für p = 2.

b) $$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f'(x) \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f'(x)| = \|f'\|_1$$

c) Zunächst

$$\|f^2\|_\infty = \left\| 2 \cdot \int f(x)f'(x)dx \right\|_\infty = \sup_{x\in K} \left| 2 \int f(x)f'(x)dx \right| \leq_{(19b)} 2 \int |f(x)f'(x)|dx = 2\|ff'\|_1$$

Zeige $2 \cdot \|f \cdot f'\|_1 \leq 2 \cdot \|f\|_2 \cdot \|f'\|_2$. Benutze die **Hölder-Ungleichung**, setze $p = q$, $g = f'$ und eliminiere 2:

$$\int |f \cdot g| \leq \left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Damit folgt die rechte Teil-Ungleichung.